



**Условия задач**  
**8 класс. Первый день**

**8.1.** Выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  таков, что  $\angle BAD = 2\angle BCD$  и  $AB = AD$ . Пусть  $P$  — такая точка, что  $ABCP$  — параллелограмм. Докажите, что  $CP = DP$ .

**8.2.** Точка  $M$  — середина большей боковой стороны  $CD$  прямоугольной трапеции  $ABCD$ . Описанные около треугольников  $BCM$  и  $AMD$  окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точке  $E$ . Пусть  $ED$  пересекает  $\omega_1$  в точке  $F$ , а  $FB$  пересекает  $AD$  в  $G$ . Докажите, что  $GM$  — биссектриса угла  $BGD$ .

**8.3.** Даны окружность  $\omega$  и не лежащая на ней точка  $P$ . Пусть  $ABC$  — произвольный правильный треугольник, вписанный в  $\omega$ , а точки  $A', B', C'$  — проекции  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$ . Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников  $A'B'C'$ .

**8.4.** Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ . Пусть  $P$  — точка пересечения его диагоналей, а точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Окружность  $OPM$  вторично пересекает отрезки  $AP$  и  $BP$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно, а окружность  $OPN$  вторично пересекает отрезки  $CP$  и  $DP$  в точках  $C_1$  и  $D_1$  соответственно. Докажите, что площади четырёхугольников  $AA_1B_1B$  и  $CC_1D_1D$  равны.



**Условия задач**  
**8 класс. Первый день**

**8.1.** Выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  таков, что  $\angle BAD = 2\angle BCD$  и  $AB = AD$ . Пусть  $P$  — такая точка, что  $ABCP$  — параллелограмм. Докажите, что  $CP = DP$ .

**8.2.** Точка  $M$  — середина большей боковой стороны  $CD$  прямоугольной трапеции  $ABCD$ . Описанные около треугольников  $BCM$  и  $AMD$  окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точке  $E$ . Пусть  $ED$  пересекает  $\omega_1$  в точке  $F$ , а  $FB$  пересекает  $AD$  в  $G$ . Докажите, что  $GM$  — биссектриса угла  $BGD$ .

**8.3.** Даны окружность  $\omega$  и не лежащая на ней точка  $P$ . Пусть  $ABC$  — произвольный правильный треугольник, вписанный в  $\omega$ , а точки  $A', B', C'$  — проекции  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$ . Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников  $A'B'C'$ .

**8.4.** Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ . Пусть  $P$  — точка пересечения его диагоналей, а точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Окружность  $OPM$  вторично пересекает отрезки  $AP$  и  $BP$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно, а окружность  $OPN$  вторично пересекает отрезки  $CP$  и  $DP$  в точках  $C_1$  и  $D_1$  соответственно. Докажите, что площади четырёхугольников  $AA_1B_1B$  и  $CC_1D_1D$  равны.



## Условия задач

### 9 класс. Первый день

**9.1.** Пусть  $BH$  — высота прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ). Внеписанная окружность треугольника  $ABH$ , противолежащая вершине  $B$ , касается прямой  $AB$  в точке  $A_1$ ; аналогично определяется точка  $C_1$ . Докажите, что  $AC \parallel A_1C_1$ .

**9.2.** Окружности  $s_1$  и  $s_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проводятся всевозможные прямые, вторично пересекающие окружности в точках  $P_1$  и  $P_2$ . Постройте циркулем и линейкой ту прямую, для которой  $P_1A \cdot AP_2$  принимает наибольшее значение.

**9.3.** Средняя линия, параллельная стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , пересекает его описанную окружность в точках  $X$  и  $Y$ . Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $D$  — середина дуги  $AC$ , не содержащей точку  $B$ . На отрезке  $DI$  отметили точку  $L$  такую, что  $DL = BI/2$ . Докажите, что из точек  $X$  и  $Y$  отрезок  $IL$  виден под равными углами.

**9.4.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC$ ,  $P$  — середина меньшей дуги  $AB$  окружности  $ABC$ ,  $Q$  — середина отрезка  $AC$ . Окружность с центром в  $O$ , описанная около  $APQ$ , вторично пересекает  $AB$  в точке  $K$ . Докажите, что прямые  $PO$  и  $KQ$  пересекаются на биссектрисе угла  $ABC$ .



## Условия задач

### 9 класс. Первый день

**9.1.** Пусть  $BH$  — высота прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ). Внеписанная окружность треугольника  $ABH$ , противолежащая вершине  $B$ , касается прямой  $AB$  в точке  $A_1$ ; аналогично определяется точка  $C_1$ . Докажите, что  $AC \parallel A_1C_1$ .

**9.2.** Окружности  $s_1$  и  $s_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проводятся всевозможные прямые, вторично пересекающие окружности в точках  $P_1$  и  $P_2$ . Постройте циркулем и линейкой ту прямую, для которой  $P_1A \cdot AP_2$  принимает наибольшее значение.

**9.3.** Средняя линия, параллельная стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , пересекает его описанную окружность в точках  $X$  и  $Y$ . Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $D$  — середина дуги  $AC$ , не содержащей точку  $B$ . На отрезке  $DI$  отметили точку  $L$  такую, что  $DL = BI/2$ . Докажите, что из точек  $X$  и  $Y$  отрезок  $IL$  виден под равными углами.

**9.4.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC$ ,  $P$  — середина меньшей дуги  $AB$  окружности  $ABC$ ,  $Q$  — середина отрезка  $AC$ . Окружность с центром в  $O$ , описанная около  $APQ$ , вторично пересекает  $AB$  в точке  $K$ . Докажите, что прямые  $PO$  и  $KQ$  пересекаются на биссектрисе угла  $ABC$ .



## Условия задач

### 10 класс. Первый день

**10.1.** Даны два одинаково ориентированных квадрата  $A_1A_2A_3A_4$  и  $B_1B_2B_3B_4$ . Серединные перпендикуляры к отрезкам  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$  пересекают серединные перпендикуляры к отрезкам  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$ ,  $A_1B_1$  в точках  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  соответственно. Докажите, что  $PR \perp QS$ .

**10.2.** Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Общие внешние касательные к окружностям  $ABC$  и  $ACD$  пересекаются в точке  $E$ , к окружностям  $ABD$  и  $BCD$  — в точке  $F$ . Докажите, что если точка  $F$  лежит на прямой  $AC$ , то точка  $E$  лежит на прямой  $BD$ .

**10.3.** Прямая пересекает отрезок  $AB$  в точке  $C$ . Какое максимальное число точек  $X$  может найтись на этой прямой так, чтобы один из углов  $AXC$  и  $BXC$  был в два раза больше другого?

**10.4.** Выпуклый четырехугольник  $ABCD$  таков, что  $\angle B = \angle D$ . Докажите, что середина диагонали  $BD$  лежит на общей внутренней касательной к окружностям, вписанным в треугольники  $ABC$  и  $ACD$ .



## Условия задач

### 10 класс. Первый день

**10.1.** Даны два одинаково ориентированных квадрата  $A_1A_2A_3A_4$  и  $B_1B_2B_3B_4$ . Серединные перпендикуляры к отрезкам  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$  пересекают серединные перпендикуляры к отрезкам  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$ ,  $A_1B_1$  в точках  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  соответственно. Докажите, что  $PR \perp QS$ .

**10.2.** Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Общие внешние касательные к окружностям  $ABC$  и  $ACD$  пересекаются в точке  $E$ , к окружностям  $ABD$  и  $BCD$  — в точке  $F$ . Докажите, что если точка  $F$  лежит на прямой  $AC$ , то точка  $E$  лежит на прямой  $BD$ .

**10.3.** Прямая пересекает отрезок  $AB$  в точке  $C$ . Какое максимальное число точек  $X$  может найтись на этой прямой так, чтобы один из углов  $AXC$  и  $BXC$  был в два раза больше другого?

**10.4.** Выпуклый четырехугольник  $ABCD$  таков, что  $\angle B = \angle D$ . Докажите, что середина диагонали  $BD$  лежит на общей внутренней касательной к окружностям, вписанным в треугольники  $ABC$  и  $ACD$ .



**Problems**  
**First day. 8 grade**

**8.1.** Let  $ABCD$  be a convex quadrilateral with  $\angle BAD = 2\angle BCD$  and  $AB = AD$ . Let  $P$  be a point such that  $ABCP$  is a parallelogram. Prove that  $CP = DP$ .

**8.2.** Let  $ABCD$  be a right-angled trapezoid and  $M$  be the midpoint of its greater lateral side  $CD$ . Circumcircles  $\omega_1$  and  $\omega_2$  of triangles  $BCM$  and  $AMD$  meet for the second time at point  $E$ . Let  $ED$  meet  $\omega_1$  at point  $F$ , and  $FB$  meet  $AD$  at point  $G$ . Prove that  $GM$  bisects angle  $BGD$ .

**8.3.** A circle  $\omega$  and a point  $P$  not lying on it are given. Let  $ABC$  be an arbitrary regular triangle inscribed into  $\omega$  and  $A', B', C'$  be the projections of  $P$  to  $BC, CA, AB$ . Find the locus of centroids of triangles  $A'B'C'$ .

**8.4.** Let  $ABCD$  be a cyclic quadrilateral,  $O$  be its circumcenter,  $P$  be a common points of its diagonals, and  $M, N$  be the midpoints of  $AB$  and  $CD$  respectively. The circle  $OPM$  meets for the second time segments  $AP$  and  $BP$  at points  $A_1$  and  $B_1$  respectively, and the circle  $OPN$  meets for the second time segments  $CP$  and  $DP$  at points  $C_1$  and  $D_1$  respectively. Prove that the areas of quadrilaterals  $AA_1B_1B$  and  $CC_1D_1D$  are equal.



**Problems**  
**First day. 8 grade**

**8.1.** Let  $ABCD$  be a convex quadrilateral with  $\angle BAD = 2\angle BCD$  and  $AB = AD$ . Let  $P$  be a point such that  $ABCP$  is a parallelogram. Prove that  $CP = DP$ .

**8.2.** Let  $ABCD$  be a right-angled trapezoid and  $M$  be the midpoint of its greater lateral side  $CD$ . Circumcircles  $\omega_1$  and  $\omega_2$  of triangles  $BCM$  and  $AMD$  meet for the second time at point  $E$ . Let  $ED$  meet  $\omega_1$  at point  $F$ , and  $FB$  meet  $AD$  at point  $G$ . Prove that  $GM$  bisects angle  $BGD$ .

**8.3.** A circle  $\omega$  and a point  $P$  not lying on it are given. Let  $ABC$  be an arbitrary regular triangle inscribed into  $\omega$  and  $A', B', C'$  be the projections of  $P$  to  $BC, CA, AB$ . Find the locus of centroids of triangles  $A'B'C'$ .

**8.4.** Let  $ABCD$  be a cyclic quadrilateral,  $O$  be its circumcenter,  $P$  be a common points of its diagonals, and  $M, N$  be the midpoints of  $AB$  and  $CD$  respectively. The circle  $OPM$  meets for the second time segments  $AP$  and  $BP$  at points  $A_1$  and  $B_1$  respectively, and the circle  $OPN$  meets for the second time segments  $CP$  and  $DP$  at points  $C_1$  and  $D_1$  respectively. Prove that the areas of quadrilaterals  $AA_1B_1B$  and  $CC_1D_1D$  are equal.



**Problems**  
**First day. 9 grade**

**9.1.** Let  $BH$  be an altitude of right-angled triangle  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ). An excircle of triangle  $ABH$  opposite to  $B$  touches  $AB$  at point  $A_1$ ; a point  $C_1$  is defined similarly. Prove that  $AC \parallel A_1C_1$ .

**9.2.** Let circles  $s_1$  and  $s_2$  meet at points  $A$  and  $B$ . Consider all lines passing through  $A$  and meeting the circles for the second time at points  $P_1$  and  $P_2$  respectively. Construct by a compass and a ruler a line such that  $P_1A \cdot AP_2$  is maximal.

**9.3.** A medial line parallel to the side  $AC$  of a triangle  $ABC$  meets its circumcircle at points  $X$  and  $Y$ . Let  $I$  be the incenter of triangle  $ABC$  and  $D$  be the midpoint of the arc  $AC$  not containing  $B$ . A point  $L$  lie on segment  $DI$  in such a way that  $DL = BI/2$ . Prove that  $\angle IXL = \angle IYL$ .

**9.4.** Let  $ABC$  be an isosceles triangle with  $AB = AC$ ,  $P$  be the midpoint of the minor arc  $AB$  of its circumcircle, and  $Q$  be the midpoint of  $AC$ . A circumcircle of triangle  $APQ$  centered at  $O$  meets  $AB$  for the second time at point  $K$ . Prove that lines  $PO$  and  $KQ$  meet on the bisector of angle  $ABC$ .



**Problems**  
**First day. 9 grade**

**9.1.** Let  $BH$  be an altitude of right-angled triangle  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ). An excircle of triangle  $ABH$  opposite to  $B$  touches  $AB$  at point  $A_1$ ; a point  $C_1$  is defined similarly. Prove that  $AC \parallel A_1C_1$ .

**9.2.** Let circles  $s_1$  and  $s_2$  meet at points  $A$  and  $B$ . Consider all lines passing through  $A$  and meeting the circles for the second time at points  $P_1$  and  $P_2$  respectively. Construct by a compass and a ruler a line such that  $P_1A \cdot AP_2$  is maximal.

**9.3.** A medial line parallel to the side  $AC$  of a triangle  $ABC$  meets its circumcircle at points  $X$  and  $Y$ . Let  $I$  be the incenter of triangle  $ABC$  and  $D$  be the midpoint of the arc  $AC$  not containing  $B$ . A point  $L$  lie on segment  $DI$  in such a way that  $DL = BI/2$ . Prove that  $\angle IXL = \angle IYL$ .

**9.4.** Let  $ABC$  be an isosceles triangle with  $AB = AC$ ,  $P$  be the midpoint of the minor arc  $AB$  of its circumcircle, and  $Q$  be the midpoint of  $AC$ . A circumcircle of triangle  $APQ$  centered at  $O$  meets  $AB$  for the second time at point  $K$ . Prove that lines  $PO$  and  $KQ$  meet on the bisector of angle  $ABC$ .



## Problems

### First day. 10 grade

**10.1.** Let  $A_1A_2A_3A_4$  and  $B_1B_2B_3B_4$  be two squares oriented clockwise. The perpendicular bisectors to segments  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$  meet the perpendicular bisectors to segments  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$ ,  $A_1B_1$  at points  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  respectively. Prove that  $PR \perp QS$ .

**10.2.** Let  $ABCD$  be a convex quadrilateral. The common external tangents to circles  $ABC$  and  $ACD$  meet at point  $E$ , the common external tangents to circles  $ABD$  and  $BCD$  meet at point  $F$ . Let  $F$  lie on  $AC$ , prove that  $E$  lies on  $BD$ .

**10.3.** A line meets a segment  $AB$  at point  $C$ . What is the maximal number of points  $X$  of this line such that one of angles  $AXC$  and  $BXC$  is equal to a half of the second one?

**10.4.** Let  $ABCD$  be a convex quadrilateral with  $\angle B = \angle D$ . Prove that the midpoint of  $BD$  lies on the common internal tangent to the incircles of triangles  $ABC$  and  $ACD$ .



## Problems

### First day. 10 grade

**10.1.** Let  $A_1A_2A_3A_4$  and  $B_1B_2B_3B_4$  be two squares oriented clockwise. The perpendicular bisectors to segments  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$  meet the perpendicular bisectors to segments  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$ ,  $A_1B_1$  at points  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  respectively. Prove that  $PR \perp QS$ .

**10.2.** Let  $ABCD$  be a convex quadrilateral. The common external tangents to circles  $ABC$  and  $ACD$  meet at point  $E$ , the common external tangents to circles  $ABD$  and  $BCD$  meet at point  $F$ . Let  $F$  lie on  $AC$ , prove that  $E$  lies on  $BD$ .

**10.3.** A line meets a segment  $AB$  at point  $C$ . What is the maximal number of points  $X$  of this line such that one of angles  $AXC$  and  $BXC$  is equal to a half of the second one?

**10.4.** Let  $ABCD$  be a convex quadrilateral with  $\angle B = \angle D$ . Prove that the midpoint of  $BD$  lies on the common internal tangent to the incircles of triangles  $ABC$  and  $ACD$ .



## Условия задач

### 8 класс. Второй день

**8.5.** Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Пусть  $A'$  — точка, симметричная  $A_1$  относительно прямой  $B_1C_1$ ; аналогично определяется точка  $C'$ . Прямые  $A'C_1$  и  $C'A_1$  пересекаются в точке  $D$ . Докажите, что  $BD \parallel AC$ .

**8.6.** Даны две окружности, пересекающиеся в точках  $A$ ,  $B$ , и точка  $O$ , лежащая вне их. Циркулем и линейкой постройте такой луч с началом  $O$ , пересекающий первую окружность в точке  $C$ , а вторую — в точке  $D$ , чтобы отношение  $OC : OD$  было максимальным.

**8.7.** На плоскости даны десять точек таких, что любые четыре лежат на контуре некоторого квадрата. Верно ли, что все десять лежат на контуре некоторого квадрата?

**8.8.** Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AB = CD$ ). На описанной около неё окружности выбирается точка  $P$  так, что отрезок  $CP$  пересекает основание  $AD$  в точке  $Q$ . Пусть  $L$  — середина  $QD$ . Докажите, что длина диагонали трапеции не превосходит суммы расстояний от середин её боковых сторон до любой точки прямой  $PL$ .



## Условия задач

### 8 класс. Второй день

**8.5.** Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Пусть  $A'$  — точка, симметричная  $A_1$  относительно прямой  $B_1C_1$ ; аналогично определяется точка  $C'$ . Прямые  $A'C_1$  и  $C'A_1$  пересекаются в точке  $D$ . Докажите, что  $BD \parallel AC$ .

**8.6.** Даны две окружности, пересекающиеся в точках  $A$ ,  $B$ , и точка  $O$ , лежащая вне их. Циркулем и линейкой постройте такой луч с началом  $O$ , пересекающий первую окружность в точке  $C$ , а вторую — в точке  $D$ , чтобы отношение  $OC : OD$  было максимальным.

**8.7.** На плоскости даны десять точек таких, что любые четыре лежат на контуре некоторого квадрата. Верно ли, что все десять лежат на контуре некоторого квадрата?

**8.8.** Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AB = CD$ ). На описанной около неё окружности выбирается точка  $P$  так, что отрезок  $CP$  пересекает основание  $AD$  в точке  $Q$ . Пусть  $L$  — середина  $QD$ . Докажите, что длина диагонали трапеции не превосходит суммы расстояний от середин её боковых сторон до любой точки прямой  $PL$ .



## Условия задач

### 9 класс. Второй день

**9.5.** Хорды  $AB$  и  $CD$  окружности  $\omega$  пересекаются в точке  $E$ , причем  $AD = AE = EB$ . На отрезке  $CE$  отметили точку  $F$ , так что  $ED = CF$ . Биссектриса угла  $AFC$  пересекает дугу  $DAC$  в точке  $P$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $E$ ,  $F$  и  $P$  лежат на одной окружности.

**9.6.** Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  ( $AD > BC$ ) пересекаются в точке  $P$ . На отрезке  $AD$  нашлась такая точка  $Q$ , что  $BQ = CQ$ . Докажите, что линия центров окружностей, описанных около треугольников  $AQC$  и  $BQD$ , перпендикулярна прямой  $PQ$ .

**9.7.** Пусть высоты остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Окружность, описанная около треугольника  $AHC$ , пересекает отрезки  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая  $PQ$  пересекает  $AC$  в  $R$ . На прямой  $PH$  взята точка  $K$  такая, что  $\angle KAC = 90^\circ$ . Докажите, что прямая  $KR$  перпендикулярна одной из медиан треугольника  $ABC$ .

**9.8.** На плоскости провели несколько окружностей и отметили все точки их пересечения или касания. Может ли оказаться, что на каждой окружности лежат ровно пять отмеченных точек, а через каждую отмеченную точку проходят ровно пять окружностей?



## Условия задач

### 9 класс. Второй день

**9.5.** Хорды  $AB$  и  $CD$  окружности  $\omega$  пересекаются в точке  $E$ , причем  $AD = AE = EB$ . На отрезке  $CE$  отметили точку  $F$ , так что  $ED = CF$ . Биссектриса угла  $AFC$  пересекает дугу  $DAC$  в точке  $P$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $E$ ,  $F$  и  $P$  лежат на одной окружности.

**9.6.** Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  ( $AD > BC$ ) пересекаются в точке  $P$ . На отрезке  $AD$  нашлась такая точка  $Q$ , что  $BQ = CQ$ . Докажите, что линия центров окружностей, описанных около треугольников  $AQC$  и  $BQD$ , перпендикулярна прямой  $PQ$ .

**9.7.** Пусть высоты остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Окружность, описанная около треугольника  $AHC$ , пересекает отрезки  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая  $PQ$  пересекает  $AC$  в  $R$ . На прямой  $PH$  взята точка  $K$  такая, что  $\angle KAC = 90^\circ$ . Докажите, что прямая  $KR$  перпендикулярна одной из медиан треугольника  $ABC$ .

**9.8.** На плоскости провели несколько окружностей и отметили все точки их пересечения или касания. Может ли оказаться, что на каждой окружности лежат ровно пять отмеченных точек, а через каждую отмеченную точку проходят ровно пять окружностей?



**Условия задач**  
**10 класс. Второй день**

**10.5.** Из точки  $A$  к окружности  $\Omega$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$ . На отрезке  $BC$  отмечена середина  $M$  и произвольная точка  $P$ . Прямая  $AP$  пересекает окружность  $\Omega$  в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что общие внешние касательные к окружностям  $MDP$  и  $MPE$  пересекаются на средней линии треугольника  $ABC$ .

**10.6.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  точки  $O, I$  — центры описанной и вписанной окружностей,  $P$  — произвольная точка на отрезке  $OI$ , точки  $P_A, P_B$  и  $P_C$  — вторые точки пересечения прямых  $PA, PB$  и  $PC$  с окружностью  $ABC$ . Докажите, что биссектрисы углов  $BP_A C, CP_B A$  и  $AP_C B$  пересекаются в одной точке, лежащей на прямой  $OI$ .

**10.7.** На плоскости провели несколько окружностей и отметили все точки их пересечения или касания. Может ли оказаться, что на каждой окружности лежат ровно четыре отмеченных точки, а через каждую отмеченную точку проходят ровно четыре окружности?

**10.8.** Дан центрально-симметричный октаэдр  $ABCA'B'C'$  (пары  $A$  и  $A', B$  и  $B', C$  и  $C'$  противоположны), такой, что суммы плоских углов при каждой из вершин октаэдра равны  $240^\circ$ . В треугольниках  $ABC$  и  $A'BC$  отмечены точки Торричелли  $T_1$  и  $T_2$ . Докажите, что расстояния от  $T_1$  и  $T_2$  до  $BC$  равны.



**Условия задач**  
**10 класс. Второй день**

**10.5.** Из точки  $A$  к окружности  $\Omega$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$ . На отрезке  $BC$  отмечена середина  $M$  и произвольная точка  $P$ . Прямая  $AP$  пересекает окружность  $\Omega$  в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что общие внешние касательные к окружностям  $MDP$  и  $MPE$  пересекаются на средней линии треугольника  $ABC$ .

**10.6.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  точки  $O, I$  — центры описанной и вписанной окружностей,  $P$  — произвольная точка на отрезке  $OI$ , точки  $P_A, P_B$  и  $P_C$  — вторые точки пересечения прямых  $PA, PB$  и  $PC$  с окружностью  $ABC$ . Докажите, что биссектрисы углов  $BP_A C, CP_B A$  и  $AP_C B$  пересекаются в одной точке, лежащей на прямой  $OI$ .

**10.7.** На плоскости провели несколько окружностей и отметили все точки их пересечения или касания. Может ли оказаться, что на каждой окружности лежат ровно четыре отмеченных точки, а через каждую отмеченную точку проходят ровно четыре окружности?

**10.8.** Дан центрально-симметричный октаэдр  $ABCA'B'C'$  (пары  $A$  и  $A', B$  и  $B', C$  и  $C'$  противоположны), такой, что суммы плоских углов при каждой из вершин октаэдра равны  $240^\circ$ . В треугольниках  $ABC$  и  $A'BC$  отмечены точки Торричелли  $T_1$  и  $T_2$ . Докажите, что расстояния от  $T_1$  и  $T_2$  до  $BC$  равны.



## Problems

### Second day. 8 grade

**8.5.** The incircle of triangle  $ABC$  touches  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  at points  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  respectively. Let  $A'$  be the reflection of  $A_1$  about  $B_1C_1$ ; point  $C'$  is defined similarly. Lines  $A'C_1$  and  $C'A_1$  meet at point  $D$ . Prove that  $BD \parallel AC$ .

**8.6.** Two circles meeting at points  $A$ ,  $B$  and a point  $O$  outside them are given. Using a compass and a ruler, construct a ray with origin  $O$  meeting the first circle at point  $C$  and the second one at point  $D$  in such a way that the ratio  $OC : OD$  be maximal.

**8.7.** Ten points on a plane are such that any four of them lie on the boundary of some square. Is it obligatory true that all ten points lie on the boundary of some square?

**8.8.** An isosceles trapezoid  $ABCD$  ( $AB = CD$ ) is given. A point  $P$  on its circumcircle is such that segments  $CP$  and  $AD$  meet at point  $Q$ . Let  $L$  be the midpoint of  $QD$ . Prove that the diagonal of the trapezoid is not greater than the sum of distances from the midpoints of the lateral sides to an arbitrary point of line  $PL$ .



## Problems

### Second day. 8 grade

**8.5.** The incircle of triangle  $ABC$  touches  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  at points  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  respectively. Let  $A'$  be the reflection of  $A_1$  about  $B_1C_1$ ; point  $C'$  is defined similarly. Lines  $A'C_1$  and  $C'A_1$  meet at point  $D$ . Prove that  $BD \parallel AC$ .

**8.6.** Two circles meeting at points  $A$ ,  $B$  and a point  $O$  outside them are given. Using a compass and a ruler, construct a ray with origin  $O$  meeting the first circle at point  $C$  and the second one at point  $D$  in such a way that the ratio  $OC : OD$  be maximal.

**8.7.** Ten points on a plane are such that any four of them lie on the boundary of some square. Is it obligatory true that all ten points lie on the boundary of some square?

**8.8.** An isosceles trapezoid  $ABCD$  ( $AB = CD$ ) is given. A point  $P$  on its circumcircle is such that segments  $CP$  and  $AD$  meet at point  $Q$ . Let  $L$  be the midpoint of  $QD$ . Prove that the diagonal of the trapezoid is not greater than the sum of distances from the midpoints of the lateral sides to an arbitrary point of line  $PL$ .



**Problems**  
**Second day. 9 grade**

**9.5.** Chords  $AB$  and  $CD$  of a circle  $\omega$  meet at point  $E$  in such a way that  $AD = AE = EB$ . Let  $F$  be a point of segment  $CE$  such that  $ED = CF$ . The bisector of angle  $AFC$  meets an arc  $DAC$  at point  $P$ . Prove that  $A$ ,  $E$ ,  $F$ , and  $P$  are concyclic.

**9.6.** Lateral sidelines  $AB$  and  $CD$  of a trapezoid  $ABCD$  ( $AD > BC$ ) meet at point  $P$ . Let  $Q$  be a point of segment  $AD$  such that  $BQ = CQ$ . Prove that the line passing through the circumcenters of triangles  $AQC$  and  $BQD$  is perpendicular to  $PQ$ .

**9.7.** Let  $H$  be the orthocenter of an acute-angled triangle  $ABC$ . The circumcircle of triangle  $AHC$  meets segments  $AB$  and  $BC$  at points  $P$  and  $Q$ . Lines  $PQ$  and  $AC$  meet at point  $R$ . A point  $K$  lies on the line  $PH$  in such a way that  $\angle KAC = 90^\circ$ . Prove that  $KR$  is perpendicular to one of medians of triangle  $ABC$ .

**9.8.** Several circles are drawn on the plane and all points of their intersection or touching are marked. Is it possible that each circle contains exactly five marked points and each point belongs to exactly five circles?



**Problems**  
**Second day. 9 grade**

**9.5.** Chords  $AB$  and  $CD$  of a circle  $\omega$  meet at point  $E$  in such a way that  $AD = AE = EB$ . Let  $F$  be a point of segment  $CE$  such that  $ED = CF$ . The bisector of angle  $AFC$  meets an arc  $DAC$  at point  $P$ . Prove that  $A$ ,  $E$ ,  $F$ , and  $P$  are concyclic.

**9.6.** Lateral sidelines  $AB$  and  $CD$  of a trapezoid  $ABCD$  ( $AD > BC$ ) meet at point  $P$ . Let  $Q$  be a point of segment  $AD$  such that  $BQ = CQ$ . Prove that the line passing through the circumcenters of triangles  $AQC$  and  $BQD$  is perpendicular to  $PQ$ .

**9.7.** Let  $H$  be the orthocenter of an acute-angled triangle  $ABC$ . The circumcircle of triangle  $AHC$  meets segments  $AB$  and  $BC$  at points  $P$  and  $Q$ . Lines  $PQ$  and  $AC$  meet at point  $R$ . A point  $K$  lies on the line  $PH$  in such a way that  $\angle KAC = 90^\circ$ . Prove that  $KR$  is perpendicular to one of medians of triangle  $ABC$ .

**9.8.** Several circles are drawn on the plane and all points of their intersection or touching are marked. Is it possible that each circle contains exactly five marked points and each point belongs to exactly five circles?

## Problems

## Second day. 10 grade



**10.5.** Let  $AB$  and  $AC$  be the tangents from a point  $A$  to a circle  $\Omega$ . Let  $M$  be the midpoint of  $BC$  and  $P$  be an arbitrary point on this segment. A line  $AP$  meets  $\Omega$  at points  $D$  and  $E$ . Prove that the common external tangents to circles  $MDP$  and  $MPE$  meet on the medial line of triangle  $ABC$ .

**10.6.** Let  $O, I$  be the circumcenter and the incenter of triangle  $ABC$ ;  $P$  be an arbitrary point on segment  $OI$ ;  $P_A, P_B,$  and  $P_C$  be the second common points of lines  $PA, PB,$  and  $PC$  with the circumcircle of triangle  $ABC$ . Prove that the bisectors of angles  $BP_A C, CP_B A,$  and  $AP_C B$  concur at a point lying on  $OI$ .

**10.7.** Several circles are drawn on the plane and all points of their intersection or touching are marked. May be that each circle contains exactly four marked points and each point belongs to exactly four circles?

**10.8.** Let  $ABCA'B'C'$  be a centrosymmetric octahedron (vertices  $A$  and  $A', B$  and  $B', C$  and  $C'$  are opposite) such that the sums of four planar angles equal  $240^\circ$  for each vertex. The Torricelli points  $T_1$  and  $T_2$  of triangles  $ABC$  and  $A'BC$  are marked. Prove that the distances from  $T_1$  and  $T_2$  to  $BC$  are equal.

## Problems

## Second day. 10 grade



**10.5.** Let  $AB$  and  $AC$  be the tangents from a point  $A$  to a circle  $\Omega$ . Let  $M$  be the midpoint of  $BC$  and  $P$  be an arbitrary point on this segment. A line  $AP$  meets  $\Omega$  at points  $D$  and  $E$ . Prove that the common external tangents to circles  $MDP$  and  $MPE$  meet on the medial line of triangle  $ABC$ .

**10.6.** Let  $O, I$  be the circumcenter and the incenter of triangle  $ABC$ ;  $P$  be an arbitrary point on segment  $OI$ ;  $P_A, P_B,$  and  $P_C$  be the second common points of lines  $PA, PB,$  and  $PC$  with the circumcircle of triangle  $ABC$ . Prove that the bisectors of angles  $BP_A C, CP_B A,$  and  $AP_C B$  concur at a point lying on  $OI$ .

**10.7.** Several circles are drawn on the plane and all points of their intersection or touching are marked. May be that each circle contains exactly four marked points and each point belongs to exactly four circles?

**10.8.** Let  $ABCA'B'C'$  be a centrosymmetric octahedron (vertices  $A$  and  $A', B$  and  $B', C$  and  $C'$  are opposite) such that the sums of four planar angles equal  $240^\circ$  for each vertex. The Torricelli points  $T_1$  and  $T_2$  of triangles  $ABC$  and  $A'BC$  are marked. Prove that the distances from  $T_1$  and  $T_2$  to  $BC$  are equal.